

## CONEXIONES ENTRE MATEMÁTICAS Y FÍSICA. DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS ESPAÑOLES.

### RELATIONSHIPS BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS. DIFICULTIES MET BY SPANISH STUDENTS

Ana Patricia Vidal Román  
apvidal@usal.es  
Colegio Misioneras de la Providencia, Salamanca

María Teresa González Astudillo  
maite@usal.es  
Profesora titular Universidad de Salamanca

#### RESUMEN

El propósito de esta investigación es realizar un estudio en torno a los errores que se presentan por parte de los alumnos a la hora de realizar conexiones entre diferentes materias como son las matemáticas y la física. Tomaremos en consideración el pensamiento lateral como marco teórico principalmente y propondremos a los alumnos la resolución de una serie de ejercicios para poder observar cómo conectan ellos los contenidos de las dos disciplinas que inherentemente se encuentran relacionadas.

Nos centraremos en los alumnos pertenecientes al curso de 1º de bachillerato (16/17 años), para poder concretar más estos errores aunque se tomará una muestra pequeña para el estudio. Se realizará una clasificación de los errores cometidos por cada alumno, fijándonos en clasificaciones previamente establecidas por diferentes autores, y finalmente se extraerán diferentes conclusiones en base a los mismos entre las que encontraremos principalmente la falta de comprensión lectora.

**Palabras clave:** Dificultades interdisciplinarias, matemáticas y física, pensamiento lateral.

## ABSTRACT

The purpose of this investigation is to carry out a study on the errors made by students when attempting to relate different subjects such as mathematics and physics. We will take into consideration a lateral thinking strategy on a general basis and the students will be presented with the task of solving a number of exercises in order to be able to observe how they link the contents of both disciplines, which are inherently related.

We will focus on 1st year bachillerato students (16 or 17 years of age) with the aim of pinpointing those errors although only a small sample of them will be for the study. A classification of the errors made by the students will be carried out referring to classifications previously established by several authors, and finally different conclusions will be drawn based on those errors among which a lack of reading comprehension will mainly be found.

**Key words:** Interdisciplinary difficulties, mathematics and physics, lateral thinking

## INTRODUCCIÓN

El trabajo interdisciplinario debería jugar un papel muy importante en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias, pero a menudo podemos observar los problemas a los que nos enfrentamos al no ser así. Habitualmente nos encontramos con que nuestros alumnos tienden a memorizar conceptos de cada una de las disciplinas científicas y a encapsularlos, según la disciplina de la que se trate, de tal forma que no son capaces de establecer conexiones entre unas y otras. El problema en este caso viene, por ejemplo, cuando los alumnos no son capaces de asociar conceptos matemáticos previamente aprendidos con la física, puesto que, ésta última está basada en dichos conceptos matemáticos que son absolutamente necesarios para su comprensión. “Dentro de la perspectiva actual, la ciencia puede entenderse como la búsqueda de soluciones a los problemas que se nos plantean” (Oviedo, et al., 2004, p.687). A partir de esto se considera que “la Resolución de Problemas constituye y desempeña un papel

fundamental en la enseñanza y aprendizaje de las ciencias, dirigido a producir aprendizaje significativo” (Ausubel, et al., 1991).

La resolución de problemas es entonces considerada como una actividad que lleva a un apoyo y a una consolidación de los contenidos conceptuales previamente aprendidos. En esta pequeña investigación, buscamos trabajar simultáneamente en Matemáticas y Física un mismo problema. Es necesario para ello aplicar los métodos matemáticos para la resolución de problemas físicos, aplicando lo que llamamos el pensamiento lateral, en el que nos detenemos más adelante.

La matemática tiene un alto valor formativo puesto que desarrolla las capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal, además de permitir la codificación de la información. Todo aprendizaje se transforma en significativo cuando no es arbitrario ni confuso, sino que es pertinente y relacionado. Además resulta también significativo cuando el alumno está motivado para aprender, de tal modo que su aprendizaje se transforma en funcional (Oviedo, et al., 2004, p.688).

Habitualmente los alumnos creen que la resolución de un problema científico, bien sea de matemáticas o de física, se compone de la realización de cuentas desconociendo la existencia del modelo matemático subyacente. La enseñanza de la matemática ha de proporcionar los instrumentos adecuados para enfrentar fuera del aula situaciones de resolución de problemas que, cierto es que no se presentarán de forma matemática, pero para su correcta resolución convendrá utilizar estrategias similares a las empleadas durante las clases. “La matemática en general ha de ser un conjunto de instrumentos que proporcionen un modo de enfrentarse a situaciones desconocidas, un medio para comunicar y comunicarse e incluso una vía de disfrute” (Oviedo, et al., 2004).

Llevar a efecto cualquiera de estas razones anteriormente expuestas exige también que los estudiantes adopten una disposición favorable, trabajo que deberá llevar a cabo el docente, haciendo ver al alumno que la matemática no es algo abstracto sino que siempre necesitaremos de la misma en el mundo en el que vivimos (Oviedo, et al., 2004).

Realizaremos para el estudio de las dificultades que buscamos, una serie de ejercicios con los que el alumno no está familiarizado, puesto que conectan de manera lógica ambas asignaturas. El alumno podrá contestar a las preguntas utilizando todo el material que considere necesario, no privándosele de nada. Los alumnos escogidos para el estudio han de explicar el procedimiento que han seguido y, en algunos casos, terminar con una conclusión sobre los resultados obtenidos algo que, a priori, en los

centros de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) y Bachillerato (alumnos de 12/13 a 17/18 años) en este país no suele ser extremadamente relevante, al no darse, en términos generales, el énfasis necesario.

El tipo de estudio, por tanto, que llevamos a cabo es un estudio de casos, obteniendo la muestra de manera intencionada entre alumnos de diferentes centros formativos, aunque todos ellos en la ciudad de Salamanca (España) y pertenecientes al curso de 1º de Bachillerato (17/18 años). Esta elección se realiza entre los alumnos que se muestran voluntarios a realizar estos ejercicios y aunque inicialmente se ofrecen más, finalmente no los entregan, acabando con una muestra de 9 alumnos.

Este estudio de casos está dirigido a los alumnos que se encuentran cursando 1º de Bachillerato o incluso a aquellos alumnos que se encuentren cursando un nivel superior pero que tengan las dos materias que intervienen en el estudio pendiente.

### **Errores y dificultades en matemáticas**

“La presencia permanente de errores en la adquisición y consolidación del conocimiento humano es una cuestión compleja y delicada.” (Rico, 1995, p.1).

La fiabilidad del conocimiento humano, es decir, la capacidad de considerar como verdaderos conceptos y conocimientos que está deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas, ha sido una preocupación constante en filósofos y pensadores que se han ocupado de estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos (Rico, 1995, p.1).

La mayoría de los autores consideran que los errores no tienen carácter accidental, sino que “surgen por las estrategias y reglas personales que los alumnos emplean en la resolución de la situación problemática y son consecuencia de las experiencias anteriores en Matemáticas” (Socas, 2007). Rico, en su artículo sobre los errores y las dificultades en matemáticas, propone una clasificación de los distintos errores, basándose a su vez en clasificaciones que realizaron autores que le precedieron.

Utilizaremos en esta pequeña investigación la clasificación mencionada por dos autores: Primero Radatz (1979) realiza la clasificación de errores a partir del procesamiento de la información.

- 1- Errores debidos a dificultades de lenguaje. En este caso no nos referimos al lenguaje castellano como tal, sino a la traducción al formalismo matemático que requiere.
- 2- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Existen alumnos con unas grandes dificultades a la hora de enfrentarse a situaciones que requieren una visión espacial, por ello involucramos este tipo de error.

- 3- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
- 4- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

Este tipo de error es muy común en el ámbito científico por parte del alumnado, dando por hecho que una vez que se lleva a cabo una cadena de pensamientos en un determinado ejercicio, habrá de ser igual en otro ejercicio, aun cuando sus condiciones se hayan visto modificadas. Dentro de este tipo de errores, el autor distingue más:

1. Errores por perseveración
2. Errores de asociación
3. Errores de interferencia
4. Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes

Tendremos en cuenta también para esta investigación la clasificación de errores más moderna mencionada por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). En este caso la clasificación propuesta es empírica, e incluye las siguientes categorías:

- 1- Datos mal utilizados, donde también se incluirá una incorrecta comprensión del enunciado del problema.
- 2- Interpretación incorrecta del lenguaje, en este caso referido a la traducción al formalismo matemático o al cambio usual de simbolismo por otro pero manteniendo el habitual desarrollo.
- 3- Inferencias no válidas lógicamente. Dentro de esta categoría vendrán incluidos aquellos errores en los que se observarán errores incluidos en la parte de la lógica.
- 4- Teoremas o definiciones deformados. En este caso, errores de un mal uso de teoremas o la teoría subsecuente.
- 5- Falta de verificación en la solución. Incluiremos aquí los casos en los que observemos que la realización del ejercicio ha sido la correcta excepto el resultado numérico final.
- 6- Errores técnicos. Se incluirán errores de cálculo, principalmente.

A partir de estas dos clasificaciones, vamos a procurar determinar los errores cometidos por los alumnos elegidos para la realización de la prueba, incluyendo siempre el tipo (o los tipos) de error cometido para una posterior reflexión sobre las dificultades que encontramos en base a los errores que hemos determinado previamente.

## EL PENSAMIENTO LATERAL

El pensamiento lateral está íntimamente relacionado con los procesos mentales de la perspicacia, la creatividad y el ingenio. Todos ellos tienen la misma base, pero se diferencian en que mientras estos tres últimos tienen un carácter espontáneo independiente de la voluntad, el pensamiento lateral es más susceptible de ser determinado por la voluntad consciente. Se trata de una forma definida de aplicar la mente a un tema o problema dado, como ocurre con el propio pensamiento lógico, pero de un modo completamente distinto (de Bono, 1993).

De Bono (1993) indica que, las ideas aparecen en base a la cultura. En un momento dado tenemos unas ideas, que pueden ser refutadas o bien continuar en nuestro pensamiento de manera más profunda. El ser humano va obteniendo sus propias ideas en base a sus experiencias y a sus creencias. Para desechar las ideas preconcebidas, necesitamos la aparición de otras ideas contrarias a las mismas, de tal modo que se cree una nueva idea en nuestra mente. Podemos también cambiar una idea debido a la aparición de nueva información, lo cual constituye la evolución de esta idea a otro nivel. Éste último caso constituye la base del proceso evolutivo de la ciencia.

Cuando las ideas ejercen una función rectora de la información en vez de constituir simples subproductos de la misma, el progreso experimenta una aceleración. Sin embargo en la enseñanza se carece hasta la fecha de medios para el cultivo de la perspicacia; se procede a una simple acumulación de información con la esperanza de que en un momento dado aparezca la perspicacia con su efecto clarificador. Para superar esa situación se ha desarrollado el pensamiento lateral como instrumento para el uso consciente y deliberado de la perspicacia (de Bono, 1993).

Según de Bono (1993), “la mente trabaja creando modelos basados en el conocimiento previamente adquirido. Cuando estos modelos se encuentran formados y asentados, es posible realizar una combinación entre los mismos”.

El pensamiento lateral principalmente difiere del vertical en que es más profundo. Para llegar a un fin, se utilizan ideas que tal vez a priori no tienen que ver con el problema que nos encontramos, pero que nos ayudan a llegar a la solución. En el pensamiento vertical, sin embargo, trabajamos un hilo de ideas siempre sobre el problema que se nos plantea.

Llegados a éste punto, es necesario hacer énfasis en que ambos pensamientos son necesarios totalmente. Es decir, necesitamos tanto el pensamiento lateral como el vertical para llegar a solventar problemas que se nos planteen en la vida cotidiana de una manera más adecuada.

Los alumnos sobre los que estamos trabajando en esta investigación aún no poseen, en general, perspicacia suficiente como para llevar a cabo un pensamiento lateral y es por este motivo por el cual, para intentar desarrollarlo, habitualmente lo que se procura es que posean la mayor cantidad de conocimiento posible referido a una determinada materia para que, en algún momento, puedan ser capaces espontáneamente de comenzar a relacionar unas ideas con otras.

Motivar al alumno, valorar su rendimiento intelectual e infundir un clima de confianza y seguridad, son terapias que pueden sacar también al adolescente de su inhibición intelectual como se nos indica en el libro *Conexiones matemáticas: Motivación del alumnado y competencia matemática* impreso en 2005 por la editorial Graó (Graó, 2005)

### **Contenidos de las asignaturas de matemáticas y física**

Los contenidos siguientes vienen establecidos en el Decreto 42/2008 (BOCyL 11 de Junio de 2008), del 5 de junio, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Los incluimos en este estudio para establecer relaciones entre los contenidos de Matemáticas y los contenidos de Física de 1º de Bachillerato. Para poder utilizar el pensamiento lateral, los alumnos deberían poder ser capaces de realizar esta relación por sí mismos, por ello aquí remitimos al lector a la página en la que encontrará los contenidos, y procedemos a realizar una comparación de los mismos dentro de sendas asignaturas.

<http://www.educa.jcyl.es/es/curriculo/curriculo-bachillerato.ficheros/136347-decreto.pdf>

## Comparación de contenidos

Podemos establecer conexiones en las dos asignaturas, proponiendo como base las físicas, y relacionándolas con su correspondiente base matemática, tal cual nos suele venir planteado en el ámbito académico actual.

Los contenidos comunes que vienen establecidos para la parte de física, pueden relacionarse con cualquiera de los contenidos matemáticos establecidos.

El estudio del movimiento debe utilizar varios de los contenidos matemáticos que se exigen en este curso. Comenzamos involucrando al álgebra, puesto que, como acostumbramos habitualmente, es necesaria la realización de ecuaciones o sistemas para la resolución de prácticamente cualquier problema que encontremos en física a lo largo del ámbito escolar. También solemos utilizar geometría, incluyendo en este momento el cálculo de algunas razones trigonométricas, así como el uso de vectores.

Se suele exigir a los alumnos de física en este curso a utilizar una correcta notación vectorial, así como el correcto uso de las unidades. Utilizaremos también en este bloque de contenidos conceptos como el de derivada e integral para los cálculos de espacios, velocidades y aceleraciones.

En el bloque de física referido a la dinámica, de nuevo necesitaremos del álgebra para la realización de prácticamente todos y cada uno de los problemas propuestos, así como de nuevo utilizaremos la geometría, aplicando comúnmente el cálculo de las razones trigonométricas, o el cálculo de longitudes mediante el teorema de Pitágoras, visto en cursos anteriores.

Para el bloque de energía y calor, necesitaremos ante todo el bloque de álgebra, para ser capaces de resolver los problemas que se nos propongan. Así como en este punto deberemos trabajar también la estimación, a la hora de trabajar con mezclas.

Para el bloque de electricidad, de nuevo, fundamentalmente utilizamos el álgebra, como anteriormente hemos explicado. Necesitaremos también la utilización de una

correcta notación vectorial y la utilización de nuevo de la geometría para el cálculo de distancias y las diferentes relaciones trigonométricas.

Finalmente añadir que todos los bloques de física contienen también contenidos del bloque de análisis de matemáticas. Fundamentalmente ha quedado mencionado en el bloque del estudio del movimiento, pero también es cierto que para llegar de una fórmula a otra en física es necesario tener conocimientos matemáticos de este bloque, aunque sobre esto no se suele hacer demasiado énfasis ya que no se exigen demostraciones a los alumnos a nivel de bachillerato.

## OBJETIVOS

Son escasas las investigaciones relacionadas con las conexiones entre las matemáticas y la física a nivel de Bachillerato, lo cual va a ocupar principalmente esta investigación. Sin embargo localizamos investigaciones relacionadas con las dificultades en matemáticas por un lado, y por otro sobre las dificultades en física, por lo que trataremos de unirlos y comprobaremos qué clase de dificultades encuentran una muestra de alumnos que se encuentran cursando 1º de Bachillerato.

El objetivo es claro, queremos conocer las dificultades que se producen a la hora de vincular las dos materias, es decir, a la hora de que los alumnos deban relacionarlas. En base a esto, pretendemos observar, mediante la realización de unos ejercicios por escrito, la dificultad ante la que se encuentran los alumnos en este caso, puesto que los conocimientos conceptuales se suponen conocidos de este curso.

Se proponen varios ejercicios en esta prueba para poder evaluar éstas dificultades. En cada uno de ellos se incluye al menos un concepto matemático utilizado por el alumno durante sus clases así como al menos un concepto físico que haya sido utilizado igualmente por parte del alumno durante este curso lectivo.

Nos proponemos encontrar errores a la hora de hacer que el alumno se enfrente a algo a lo que no se ha enfrentado nunca. Las matemáticas como todas las conocemos necesitan de un entendimiento profundo y llevan inherentemente la comprensión de los conceptos, así como debería hacerlo la física también, el problema es que los alumnos,

bien sea por comodidad, o bien por hábito, acostumbran a memorizar los procedimientos de resolución y a no ser conscientes del motivo por el cual se resuelven los ejercicios de una forma u otra. En base a esto, queremos ver qué ocurre cuando se les plantean ejercicios distintos a aquellos a los que no están acostumbrados.

Realizaremos entonces una clasificación de los errores de los alumnos dividiéndolos por ejercicios. Para ello, primeramente haremos una clasificación de los errores en base a las clasificaciones anteriormente expuestas y posteriormente reflexionaremos sobre las dificultades que encuentran los alumnos en base a estos mismos errores.

Como objetivos más específicos debemos añadir que trataremos los siguientes puntos:

- Identificar los contenidos de las materias de Matemáticas y Física establecidos en el currículo de 1º de Bachillerato.
- Detectar errores en el lenguaje lógico-matemático.
- Relacionar los posibles errores cometidos por los alumnos con las clasificaciones anteriormente expuestas.

Queda añadir que, lógicamente, los alumnos elegidos para escoger la muestra se encuentran cursando 1º de Bachillerato, tanto la opción relativa a las Ciencias de la Salud, como a la relativa al ámbito Científico-Tecnológico.

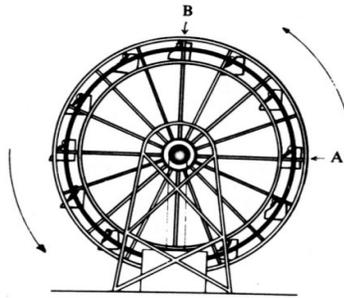
## **PRUEBA ESCRITA**

Los siguientes ejercicios han sido tomados del libro “El lenguaje de las funciones y gráficas” impreso en 1990 por el Servicio Editorial Universidad del País Vasco (Shell Centre for Mathematical Education, 1985) habiéndosele añadido algunas preguntas más:

### Ejercicio 1

La noria del diagrama da una vuelta cada 20 segundos. Utilizando el mismo par de ejes, haz dos gráficas que muestren cómo varía la altura del coche A y la del B durante un minuto. Describe cómo cambiarían tus gráficas si la noria girase más deprisa.

¿Cuál es su velocidad lineal? ¿Y cuál es su velocidad angular, si el diámetro de la noria es de 100 metros? ¿Qué velocidad lleva el pasajero en A? ¿Y en B?



En este ejercicio propuesto, pretendemos que los alumnos sean capaces de realizar una gráfica teniendo en cuenta la variación de la altura de la persona en función del tiempo. En la misma gráfica el alumno deberá representar a las dos personas que se encuentran situadas en A y en B, lo cual supone ya una dificultad para ellos, puesto que no acostumbran a realizar varias gráficas sobre los mismos ejes.

Pretendemos por supuesto que el alumno sea consciente de que los dos realizan el mismo movimiento a lo largo del tiempo, con la única diferencia del origen en las alturas, es decir, pretendemos que el alumno se dé cuenta de que el movimiento es el mismo, y que los dos recorrerán el mismo espacio en el mismo tiempo. Al realizar el mismo movimiento en un tiempo menor, el alumno debería detectar que lo que se modifica es la frecuencia, y que esto hará que, visualmente, la gráfica quede más

comprimida. Se le realizan también las preguntas siguientes relacionadas con la velocidad lineal y angular para ver si, a partir de esto, en el caso de no que hubieran sido capaces de determinar el apartado anterior, les resulta más sencillo.

En este caso lo que los alumnos van a tener es un pensamiento vertical, puesto que ellos mismos están acostumbrados a resolver este tipo de apartados, pero en el de la representación gráfica se pretende que el alumno tenga un pensamiento lateral, puesto que comúnmente los ejercicios en el ámbito escolar no vienen así establecidos.

### Ejercicio 2

Dada la siguiente función:  $f(x) = -x^2 + 4x$

- a) Calcula su dominio.
- b) Calcula sus máximos y sus mínimos
- c) Calcula los puntos de corte con los ejes
- d) Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

Este ejercicio podemos considerarlo como un mero trámite. Como podemos ver, solo vamos a activar en el alumno el pensamiento vertical, pero pretendemos que, al realizar esta representación, vayan predispuestos a realizar el siguiente ejercicio, en el que necesitarán relacionar lo que han realizado en éste ejercicio, con lo que se les pedirá en el siguiente.

### Ejercicio 3

¿Cómo cambia la velocidad de la bola cuando va por el aire en este golpe de golf?

Haz una gráfica aproximada para ilustrar tu descripción. (Velocidad/tiempo).

Si la velocidad inicial de lanzamiento es de 30 m/s formando un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical, cuál será la altura máxima que alcanzará la bola? ¿Cuál su alcance máximo? No utilices la fórmula de  $v = v_0 + at$

En este ejercicio, que realizamos como continuación del anterior, primeramente se pide al alumno la realización de una gráfica para poner en marcha sus conocimientos. En este caso, de nuevo nos encontramos ante un problema que rara vez los alumnos han podido ver entre los propuestos habitualmente en sus libros de texto, con lo cual intentamos que el alumno tenga un pensamiento lateral.

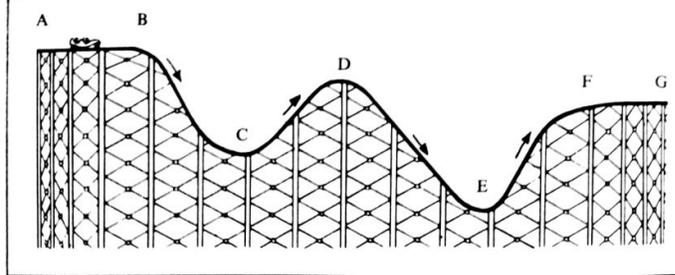
Posteriormente planteamos un problema como suele aparecer en los libros de texto, por lo que al alumno no debería resultarle complicado. Sin embargo, hemos prohibido que utilicen la fórmula de la velocidad, algo que están acostumbrados a usar en los habituales ejercicios.

Es para esto por lo que se ha propuesto el ejercicio anterior. Se pretende que el alumno relacione el movimiento de la bola con la parábola propuesta, y que sea capaz de determinar dónde se encuentran los puntos de corte con los ejes, lo cual le dará la solución al alcance máximo, así como que relacionen que la altura máxima se encontrará en el punto en el que esté situado el vértice de la parábola.

#### Ejercicio 4

En el dibujo de la siguiente montaña rusa, los coches viajan entre A y B a una velocidad lenta y constante, ¿cómo variará la velocidad desde A hasta G?

Describe tu respuesta por escrito y a su vez realiza una gráfica.



Si A está a 100 metros de altura, al igual que B, C se encuentra a 50 metros, D a 80, al igual que F y G, Suponemos que el vagón se mueve sin rozamiento. ¿A qué altura se encuentra E, si parte con una velocidad de 10m/s y pasa por ese punto a una velocidad de 30 m/s? ¿Con qué velocidad pasa por C?

En el ejercicio cuarto se pretende de nuevo que el alumno realice una gráfica representando en este caso la variación de la velocidad en función del tiempo.

La dificultad que podremos encontrar aquí es que el alumno se limite a copiar el dibujo en la gráfica, siendo la solución válida una imagen reflejada del mismo. Incidimos también en la explicación para que ellos mismos sean conscientes del aumento o la disminución de la velocidad a través de este movimiento.

Posteriormente se plantean varias preguntas tipo, como se les suelen plantear en sus libros de texto, para que también les resulte más sencilla la representación gráfica, es decir, principalmente pretendemos ayudar al alumno a que él mismo llegue a la solución propicia del ejercicio, mediante unas guías sutiles.

### Ejercicio 5

Mira con cuidado la siguiente tabla:

Sin marcar los puntos exactamente, intenta realizar una gráfica aproximada que describa la relación entre la altura del globo y la

distancia al horizonte.

Altura del globo (m)	Distancia hasta el horizonte (km)
5	8
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25
100	33
500	80
1.000	112

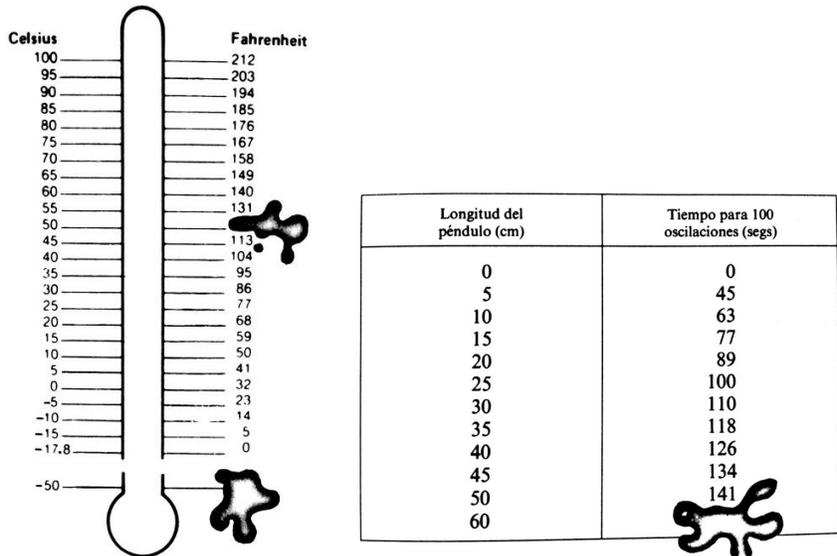
Explica cómo lo has ido realizando.

Mediante el ejercicio cinco pretendemos conseguir de nuevo que el alumno llegue al pensamiento lateral, aunque en este caso le damos menos pistas que en los casos anteriores porque se supone que ya han sido predispuestos a hacerlo. Insistimos en la explicación por parte del alumno para observar la coherencia o no sobre sus propios ejercicios así como para que ellos mismos vayan observando cómo se realizan.

De nuevo es un ejercicio propuesto distinto a lo que los alumnos acostumbran por lo que, a pesar de haberse impartido los contenidos durante el curso y, probablemente tener los conocimientos adecuados, les resulte complicado resolverlo.

### Ejercicio 6

Ahora tenemos las siguientes tablas:



The image shows a thermometer with two scales: Celsius on the left and Fahrenheit on the right. The Celsius scale ranges from -50 to 100 in increments of 5. The Fahrenheit scale ranges from 0 to 212 in increments of 9. There are two ink blots: one on the Fahrenheit scale at 113 and another on the Celsius scale at -17.8. To the right of the thermometer is a table with two columns: 'Longitud del péndulo (cm)' and 'Tiempo para 100 oscilaciones (segs)'. The table contains the following data:

Longitud del péndulo (cm)	Tiempo para 100 oscilaciones (segs)
0	0
5	45
10	63
15	77
20	89
25	100
30	110
35	118
40	126
45	134
50	141
60	

There is an ink blot on the table at the bottom right, near the value 141.

Intenta obtener la función que se ajusta a cada una de las tablas.

Explica qué conclusiones obtienes y ve explicando paso a paso lo que realizas.

Rellena también aquellos espacios en los que ha caído una mancha de tinta, una vez que hayas obtenido la función respectiva.

En el caso del ejercicio seis, tenemos dos tablas de valores, a partir de las cuales pretendemos que el alumno obtenga la función que las identifica. De nuevo es un problema al que no están acostumbrados ya que, habitualmente, los alumnos se sirven de la función para la representación, pero no del caso contrario. Los alumnos mismos saben perfectamente cuáles son las dos funciones a las que se refieren los cuadros, puesto que son funciones habituales en física, pero evidentemente pretendemos que sean capaces de llegar a ellas, de nuevo fomentando el pensamiento lateral.

## ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

El análisis de los errores cometidos lo realizaremos individualmente, aunque posteriormente realizaremos una conclusión general.

### Ejercicio 1

Comenzamos el estudio por el alumno 1. Comienza realizando el dibujo de la gráfica que se le pedía en el enunciado, aunque cometiendo un error. La gráfica del coche B está correcta. Sin embargo, el alumno supone que el coche A parte de una altura inicial 0, lo cual no es correcto. El error lo podemos clasificar dentro de errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento, a la vez que podríamos incluirlo también dentro de los errores por datos mal utilizados. Así mismo, el alumno no realiza la representación de la gráfica en los 60 segundos pedidos, aunque marca sobre la misma que lo ha realizado en 40 segundos y que esto implica dos vueltas, con lo cual es consciente de lo que tenía que realizar, pero aun así decide no solventarlo, por lo que de nuevo clasificaremos este error dentro de los errores por datos mal utilizados.

Si continuamos con el orden del ejercicio, el alumno no ha explicado cómo cambiarían estos movimientos si la noria girase más deprisa, cometiendo de nuevo un error por mal uso de los datos, ya que, dando por hecho que ha sido capaz de realizar la gráfica, suponemos que este apartado no lo realiza por no haber leído el enunciado completo.

El resto de las preguntas que se formulaban en el enunciado, el alumno las ha contestado correctamente.

Siguiendo por el alumno 2, en este caso ha realizado la representación gráfica de un coche, pero ni siquiera es consecuente con ninguno de los dos coches que se plantean en el problema, por lo que de nuevo podemos evaluar varios errores. Uno debido a que el alumno no ha seguido las instrucciones dadas en el enunciado cuando se le pide que dibuje las gráficas que muestran la variación de la altura en función del tiempo de sendos coches, el cual incluiremos dentro de errores por mal uso de los datos. El otro error que hemos indicado es el error que comete teniendo en cuenta la altura inicial de

cualquiera de los dos coches, puesto que en ningún caso parten de altura 0, con lo cual, este error lo clasificaremos dentro del grupo de errores debidos a dificultades para obtener información espacial, o bien a otro error de nuevo por mal uso de los datos.

La explicación sobre el cambio que sufriría su representación si la noria girase más deprisa es correcta, aunque algo escueta, pero no detectamos ningún error en la misma.

Continuamos viendo que el alumno realiza el cálculo de las velocidades pedidas y que, a pesar de que los cálculos son correctos, el alumno es consecuente con la notación vectorial que comienza utilizando, puesto que, al llegar a la solución final, opta por dar la velocidad lineal como módulo, aun habiendo indicado que ésta misma es un vector, con lo cual este error lo clasificaremos dentro de los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

El alumno 3 comete el mismo error que el alumno 2 en el primer apartado y lo incluiremos en los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, así como también podríamos evaluarlo dentro de los errores por mal uso de los datos, por los motivos que hemos expuesto anteriormente.

En este caso el alumno no realiza la descripción del cambio de su gráfica si la noria girase más deprisa, por lo que lo incluimos dentro de los errores de mal uso de datos.

Así mismo, en el cálculo de las velocidades, el alumno de nuevo no es consecuente con la notación vectorial que utiliza en determinadas ocasiones, por lo que una vez más se encuentra cometiendo el mismo error que el alumno 2 y lo clasificaremos de igual modo.

El alumno 5 realiza el dibujo de la gráfica parcialmente correcto, puesto que no ha tenido en cuenta, como se pedía en el enunciado, que debía de representar el movimiento de los coches a lo largo de 60 segundos, por lo que comete en este caso un error que habría sido fácil de solventar, aunque lo incluiremos dentro de los errores por mal uso de los datos.

Las explicación que da el alumno sobre qué ocurre cuando la velocidad aumenta no es adecuada puesto que, como él mismo dice, cuando aumenta la velocidad disminuye “d”, lo cual no sabemos a qué se refiere en este caso. De cualquier modo, lo correcto hubiera sido explicar cómo cambiarían las gráficas, que es lo que nos pide el enunciado y sin embargo el alumno no lo hace, con lo cual de nuevo comete un error por mal uso de los datos.

Finalmente el alumno 5 termina diciendo que no recuerda las fórmulas de la velocidad, a pesar de que se les indicó a todos ellos que podían usar el material que considerasen adecuado, por lo que de este punto no podemos obtener ninguna conclusión.

Continuando por el alumno 6, éste comienza dibujando las gráficas aunque de nuevo de manera errónea. En este caso, aparte de considerar que el coche A parte de una altura 0, el alumno no dibuja ondas, sino que dibuja segmentos rectos, lo cual tampoco es correcto. Este error en todo caso lo podemos clasificar dentro de distintos tipos de errores según nuestra teoría. Podríamos incluirlo dentro de errores debidos a asociaciones incorrectas, así como también podríamos incluirlo dentro de los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos o bien incluso dentro de los errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

La explicación sobre el cambio en las gráficas si la noria girase más deprisa es correcta, con lo cual aquí no obtendremos ningún error.

Para terminar, el alumno no contesta al último apartado, por lo que no evaluamos en este caso errores.

En el caso del alumno 7, ha optado por realizar las gráficas en diferentes pares de ejes a pesar de que en el enunciado se le pedía que lo hiciera en el mismo, por lo que tenemos aquí un error por mal uso de datos. Además, la gráfica que dibuja del movimiento del coche A es de nuevo errónea y la clasificamos del mismo modo que en los casos anteriores. Tendremos en este caso también en cuenta que no ha dibujado las gráficas a lo largo de los 60 segundos pedidos, con lo cual se produce un error ya mencionado anteriormente.

La explicación que da este alumno sobre el cambio de sus gráficas no es adecuada, puesto que explica qué ocurrirá, pero no explica cómo cambiarán las gráficas. De nuevo se repite otro error anteriormente expuesto. Para terminar, en el apartado del cálculo de velocidades, el alumno incurre en una incorrecta notación vectorial, así como también confunde la fórmula de velocidad angular, por lo que de nuevo se repite el error mencionado también para el caso de sus compañeros junto con el de un error debido a teoremas o definiciones deformados a causa de la equivocación en la fórmula.

Continuando por el alumno 8, podemos observar que ha realizado correctamente el dibujo de sus gráficas, pero no ha terminado de realizar las tres vueltas que realizaría la noria en los 60 segundos, por lo que de nuevo nos encontramos ante un error por mala utilización de los datos. Este mismo alumno tampoco explica cómo cambiarían sus gráficas si aumentara la velocidad de la noria, por lo que de nuevo incurre en el error de datos mal utilizados.

Finalmente, utiliza también una notación vectorial incorrecta, error que ya hemos comentado previamente, así como otro error que también cometió el alumno 7 al confundir la fórmula de la velocidad angular. El alumno 9 no ha realizado el dibujo de las gráficas ni la explicación sobre el cambio en las mismas si aumenta la velocidad. Era el apartado que realmente más nos interesaba, al ser el único que distaba un poco de los habituales ejercicios académicos, pero pasaremos a evaluar el resto.

En el último apartado, el alumno ha indicado que el pasajero A se mantiene con una velocidad 0 mientras que el pasajero en B tiene una velocidad distinta de 0, lo cual es un error puesto que ambos se mueven a la misma velocidad. Este error lo incluiremos dentro de los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

## Ejercicio 2

El ejercicio 2 fue planteado como antecesor al ejercicio 3, ya que se pedía a los alumnos representar una función parabólica convexa hacia los valores negativos, de tal modo que posteriormente fuera relacionada con el siguiente ejercicio planteado.

En este ejercicio no se esperaban encontrar mayores dificultades, puesto que, efectivamente es un ejercicio típico que encuentran los alumnos en el ámbito escolar, pero, a pesar de esto, hemos podido encontrar algunos.

Comenzamos por el alumno 1, que realiza un cálculo erróneo sobre dónde se encuentra el máximo de esta función. Primeramente podríamos considerar que podría haber sido debido a algún tipo de error de cálculo que no fuera grave, pero observando lo realizado, está claro que el alumno no tiene una base fuerte matemática al haber equivocado el signo menos delante del término cuadrático, y haberlo considerado positivo posteriormente a la hora de dar un valor. Esto es debido a que el alumno aún no maneja una correcta notación matemática o bien a una falta de contenidos que se suponen adquiridos en un curso mucho más bajo que aquel en el que se encuentra. Determinaremos este error como error técnico, pero también pudiendo determinarlo como un error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Siguiendo por el alumno 2, observamos que también ha cometido un error en este caso debido a la incorrecta formulación del intervalo de crecimiento. En este caso es más complicado detectar el motivo por el cual el alumno ha cometido este error, pero bien podría ser debido a una simple equivocación, aunque en este caso de nuevo estaría demostrando que no realiza ningún tipo de reflexión sobre el ejercicio, o bien deberse a un error debido a una falta de conceptos adquiridos. En este caso debemos añadirlo a los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Continuando ahora por el alumno 3, de nuevo encontramos algunos errores. En este caso, el alumno se equivoca a la hora de realizar la derivada, con lo cual, a la hora de igualarla a cero para obtener un posible máximo o mínimo, el alumno debería obtener un punto erróneo, sin embargo, debido a otro error aún más grave de falta de contenidos, el alumno obtiene el punto correcto, pero no se podría valorar como tal, puesto que el error cometido para llegar hasta aquí es un error bastante serio. Ambos errores, tanto el de la confusión a la hora de derivar como el error a la hora de determinar el valor de  $x$  una vez que se ha igualado la función derivada a cero, pertenecen al tipo de errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Así mismo, el alumno indica que hay un máximo en  $(2,2)$ , a pesar de

haber realizado los cálculos incorrectamente, el resultado de  $x$  es correcto, pero sin embargo el de  $y$  no lo es y esto podría haberse dado por dos motivos. Bien el alumno habría cometido una equivocación al copiarlo, o bien encontraríamos un error de falta de contenido, puesto que, obtenemos el valor de  $x$  igualando la derivada a 0, pero luego es necesario sustituir este valor en la función principal para obtener un punto máximo en este caso, con lo cual podríamos decir que este alumno ha cometido un error debido a aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

El siguiente alumno que presenta errores es el alumno 5. En este caso, este alumno presenta errores a lo largo de todo el ejercicio, y no sólo uno puntual. Este alumno repite el error cometido por el alumno 1, que igualmente clasificaremos como un posible error técnico o un error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Continuando con los errores cometidos por el alumno 5, vemos que ha sido incapaz de obtener los puntos de corte con los ejes, dando sólo uno de ellos que es el  $(0,0)$ , aunque en este caso no podríamos determinar exactamente el motivo puesto que no realiza ningún tipo de explicación sobre lo que está realizando. Podemos imaginar que éste alumno ha dado el valor cero para cada una de las dos variables, y, en este caso, sería incorrecto al haber obviado una de las soluciones, o, en otro caso, simplemente haber dado el punto de corte con el eje  $y$ , que en este caso coincide con uno de los del eje  $x$ . En cualquier caso, deberemos determinar éste error de nuevo como un error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Por último, el alumno 5 ha incurrido en un nuevo error. A pesar de que no se le pedía en el enunciado, el alumno ha decidido calcular los puntos de inflexión y la concavidad y la convexidad, o al menos eso ha intentado. Una vez que ha conseguido realizar la segunda derivada, vemos que obtiene una constante, y, debido al resultado obtenido, el alumno concluye con que no hay concavidad ni convexidad. Evidentemente éste es un error bastante grave y demuestra una falta de conceptos adquiridos enorme. De nuevo tendremos que incluir este error dentro del mismo tipo que los errores anteriormente cometidos por el mismo alumno.

Siguiendo ahora por el alumno número 6, éste ha cometido un error a la hora de explicar su ejercicio. Éste alumno indica que el máximo determinado, sería mínimo local si estuviera acotada en intervalos, lo cual evidentemente no es cierto, con lo cual podríamos introducirlo dentro de los errores de tipo “inferencias no válidas lógicamente”.

El alumno número 7 también ha cometido un error, en este caso a la hora de resolver una ecuación simple, por lo que, viendo en general que este alumno resuelve correctamente las ecuaciones que ha ido encontrando a lo largo del ejercicio, lo trataremos como un error técnico.

El alumno número 9 presenta también multitud de errores en este ejercicio ya que, lo que el alumno realiza, es el cálculo del punto máximo en este caso, pero en este momento, el alumno ha debido de realizar una sustitución en la función derivada para obtener el signo de la misma, y sin embargo se ha equivocado, con lo cual, en este caso lo definiremos como un error técnico aunque en base a este error, el alumno ha seguido cometiendo fallos. Un error mucho más grave que ese es que el alumno llegue a la conclusión de que no hay intervalos de crecimiento y decrecimiento, cuando él mismo ha dicho previamente que la función siempre crece (aunque en este caso fuera erróneo). Éste es un error, como hemos dicho, mucho más profundo y grave que el anterior y podremos clasificarlo dentro de errores debidos a inferencias no válidas lógicamente.

### Ejercicio 3

Comenzando por el alumno 1, determinamos primeramente que el alumno no ha seguido las normas que le dictaba el enunciado, ni ha realizado la gráfica que se le pedía, con lo cual no podemos valorar en este caso las conexiones, ni ha seguido la pauta de la no utilización de una de las fórmulas típicas en física, con lo cual lo único que podemos determinar en este momento es que el alumno no ha seguido las instrucciones dadas en el enunciado. Este error lo clasificamos dentro de errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento, teniendo en cuenta que el alumno ha determinado realizarlo de la manera habitual y no siguiendo las instrucciones correspondientes, así como podemos clasificarlo a su vez como un error por un mal uso de los datos.

En el caso del alumno 2, observamos que ha realizado tres gráficas distintas. Así mismo éste alumno ha explicado el cambio de velocidad en los diferentes casos, pero a la hora de realizar las gráficas, el alumno comete errores. Primeramente en la gráfica de la velocidad en el eje y, el alumno supone que parte de una velocidad 0, cuando la bola realmente parte de una velocidad distinta de cero, disminuyendo hasta la altura máxima, en la que la velocidad se hace cero, y volviendo a aumentar hasta que la bola toca el suelo. Pretendíamos ver este error en un principio, puesto que al darse al alumno el dibujo de la trayectoria, habitualmente él mismo se equivoca a la hora de dibujar las gráficas. En este caso el error es debido a una representación inadecuada, así como también podríamos incluirlo dentro de los errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

En este caso, podemos ver también que el alumno no ha leído correctamente el enunciado. Los alumnos acostumbran a realizar estos ejercicios siempre teniendo en cuenta un ángulo dado para la velocidad inicial con respecto al eje horizontal, sin embargo, en este caso se lo dimos con respecto al eje vertical, con lo cual también produjo un error en este caso, y esta vez debido a rigidez de pensamiento o datos mal utilizados.

El cálculo posterior evidentemente es erróneo por el hecho de no haber tenido en cuenta el ángulo real, pero en cualquier caso, el alumno ha plasmado una fórmula de memoria. Ciertamente es que en este caso no interviene la fórmula que inicialmente en el enunciado habíamos prohibido, pero lo que el alumno no ha tenido en cuenta es que la fórmula que ha decidido utilizar en este caso lleva implícita la fórmula que hemos prohibido manejar, con lo cual lo determinaremos como un error de datos mal utilizados.

El alumno 3 muestra en este ejercicio exactamente los mismos errores que el alumno 2, añadiendo el hecho de que no ha descrito cómo cambia la velocidad de la bola, lo cual lleva de nuevo al error de datos mal utilizados.

El alumno 4 determina que la velocidad de la bola disminuirá progresivamente, lo cual es cierto en la primera mitad del movimiento, pero no en la segunda, con lo cual aquí encontramos el primer error. Igualmente la gráfica no está bien dibujada y aún

menos teniendo en cuenta que el alumno decide colocar valores en los ejes que no son correctos. Éste tipo de error lo clasificamos dentro de los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. El alumno 4 comete también el mismo error que los alumnos 2 y 3 a la hora de colocar el ángulo dado con respecto al eje horizontal y de nuevo comete un error debido a rigidez de pensamiento.

El alumno 4 no finaliza el ejercicio, por lo que no podemos determinar más errores al respecto.

El alumno 5 realiza la primera parte correctamente. Dibuja correctamente la gráfica y explica, aunque escuetamente, cuál es el cambio de velocidad de la bola a lo largo de su recorrido. Al no haber realizado el siguiente apartado, no podemos determinar errores.

El alumno 6 también ha intentado dibujar la gráfica, aunque con errores. En este caso el alumno supone que la velocidad parte con velocidad nula, crece progresivamente hasta un máximo, disminuye de nuevo hasta hacerse nula, vuelve a crecer hasta otro punto máximo, y vuelve a disminuir para acabar siendo cero de nuevo. Éste alumno no explica nada en este caso. Este error lo clasificaremos dentro de los errores debidos a dificultades para obtener información espacial así como dentro de los errores que se producen por una representación inadecuada.

El alumno 7 comienza realizando la gráfica, la cual dibuja totalmente invertida a la correcta. De nuevo se repite el error cometido anteriormente por los alumnos 2 y 3. Ha dibujado la gráfica también de la trayectoria, y no del cambio de la velocidad de la bola. El error es debido a una representación inadecuada, así como a la dificultad para obtener información espacial.

Así mismo, el alumno 7 utiliza también, y esta vez de forma explícita, la fórmula que indicamos en el enunciado, con lo cual de nuevo repite un error cometido previamente por otros alumnos. Así también podemos ver que de nuevo ha cometido el error del ángulo. De nuevo este alumno sigue a sus compañeros, determinando colocar el ángulo con respecto al eje horizontal, realizándolo de nuevo de manera incorrecta.

El alumno 7 también ha obviado la primera pregunta del problema, con lo cual concluiremos que los datos del enunciado han sido mal utilizados.

En el caso del alumno 8, realiza la gráfica correctamente y dando una explicación adecuada, aunque podríamos matizarla, pero no aparece ninguno de los errores que estamos buscando en esta investigación.

El alumno 8 ha determinado que no sabe realizar la segunda parte del ejercicio sin utilizar la fórmula que hemos prohibido, con lo cual no podemos obtener a partir de aquí ningún error.

El alumno 9 no realiza la gráfica, ni explica el cambio de velocidad de la bola a lo largo de su trayectoria. Sin embargo, resulta curioso ver que este alumno ha resaltado entre sus datos que el ángulo dado es con la vertical, y sin embargo, él mismo realiza las operaciones teniendo en cuenta el dato incorrecto, con lo cual nos encontramos de nuevo con el mismo error que hemos detectado anteriormente.

Al igual que ocurrió con el alumno 2, éste alumno de nuevo utiliza la fórmula de memoria que efectivamente lleva a los resultados adecuados, pero al llevar implícita la fórmula que habíamos prohibido previamente, lo determinaremos igualmente como un error anteriormente mencionado.

#### Ejercicio 4

El alumno 1 en este ejercicio realiza el dibujo de la gráfica de tal forma que no podemos determinarlo como correcto. El dibujo planteado por el alumno lleva varios picos en la velocidad que han de ser curvos, por lo que plantearemos este error dentro de los errores producidos por una representación inadecuada, o bien dentro de los errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Así mismo el alumno no explica por escrito el cambio de velocidad, a pesar de venir indicado en el enunciado, por lo que consideraremos esto como un error de datos mal utilizados. Los cálculos restantes los realiza el alumno perfectamente.

El alumno 2 realiza la gráfica igual que el alumno 1, con lo cual incluiremos de nuevo dentro del mismo tipo de error. En este caso, el alumno 2 explica el cambio de velocidad. La explicación por escrito la realiza correctamente por lo que no determinaremos ningún error aquí. De nuevo los cálculos restantes los realiza perfectamente.

El alumno 3 no realiza la actividad completa. No explica cómo cambia la velocidad ni realiza la gráfica pedida. La aplicación posterior de las fórmulas es correcta pero el alumno tiene un error en el cálculo ya que, simplifica una constante en ambas partes de la ecuación sin tenerla presente en todos los sumandos de la misma, por lo que determinaremos este error dentro de los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos o bien dentro de errores técnicos.

El alumno 4 realiza una explicación correcta y realiza un gráfico así mismo correcto. El resto de sus cálculos también son correctos.

El alumno 5 decide realizar simplemente el apartado que resulta más intuitivo para los alumnos, puesto que lo encuentran constantemente en el ámbito académico, y que es nada más el cálculo de la altura de **E** y la velocidad con la que pasa el coche por **C**. Los cálculos los realiza correctamente.

El alumno 6 no responde a esta actividad por lo que no podemos obtener información ninguna.

Los alumnos 7 y 8 realizan el ejercicio completo correctamente, aunque la explicación del cambio de velocidad por parte del alumno 8 sea más escueta, la consideramos correcta.

El alumno 9 realiza el dibujo de la gráfica correctamente, pero no explica nada sobre la misma, con lo cual podemos concluir que este es un error por datos mal utilizados.

Ejercicio 5

Pretendíamos con este problema que el alumno realizase una gráfica pintando la relación existente entre la altura del globo y la distancia al horizonte. Se le pedía al alumno que no marcara los puntos exactamente, porque pretendíamos que el alumno lo dibujara realizando pequeños incrementos.

Comenzamos de nuevo por el alumno 1. El alumno en este caso ha decidido dibujar la gráfica colocando en el eje vertical la distancia al horizonte y en el eje horizontal la altura del globo. Esto no es correcto. El alumno debería darse cuenta de que, en una función dada, siempre hay una variable dependiente y otra independiente. En este caso, la variable distancia al horizonte depende de la variable altura del globo, por lo que, en la representación gráfica, la altura del globo ha de localizarse en el eje de ordenadas mientras que la distancia al horizonte ha de venir indicada en el eje de abscisas, con lo cual aquí encontramos el primer error del alumno. Este error lo podemos incluir dentro de los errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

A su vez, si continuamos en el ejercicio del alumno 1, vemos que no explica cómo ha realizado la gráfica, algo que viene pedido explícitamente en uno de los apartados del enunciado, de modo que esto podemos considerarlo como un error por datos mal utilizados.

Continuando por el alumno 2, observamos que de nuevo comete el mismo error que el alumno 1 a la hora de colocar correctamente los ejes. En este caso de nuevo incluimos el hecho de que el alumno 2 ha cometido también un error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

También aquí el alumno 2 ha intentado dar una breve explicación, pero observamos que en la misma no nos responde a la explicación pedida en el enunciado. El alumno procura informarnos del tipo de relación obtenida a través de la gráfica y es en este punto en el que nos damos cuenta de que el alumno es perfectamente consciente de cuál es la magnitud dependiente y cuál es la magnitud independiente, pero a pesar de ello no ha sido capaz de colocarlas correctamente en sus ejes. De nuevo encontramos un error por la falta de explicación por parte del alumno ante el modo de representación

utilizado. Lo trataremos, al igual que con el alumno anterior, dentro de los errores por datos mal utilizados.

El alumno 3 ha realizado la gráfica correspondiente marcando los puntos, con lo que en este caso no se ha cumplido las indicaciones dadas en el enunciado, por lo que de nuevo detectamos un error por datos mal utilizados. A pesar de ello, la gráfica que dibuja el alumno de nuevo la realiza intercambiando los ejes, por lo que la incluimos dentro del mismo error que hemos mencionado antes para los otros dos alumnos. Este mismo alumno comete también de nuevo el error de no explicar cómo ha realizado la gráfica, con lo cual de nuevo incluiremos otro error por datos mal utilizados.

El alumno 4 realiza el dibujo de la gráfica correctamente, aunque realiza la marca de los puntos exactos que da la tabla, con lo cual, a pesar de tener el dibujo correcto, comete un error dentro de los denominados “por mala utilización de los datos”. Añadiremos igualmente que el alumno no ha explicado cómo ha realizado el dibujo ignorando las instrucciones dadas en el enunciado, por lo que deberemos añadir otro error más del mismo tipo anteriormente cometido y que se encuentra dentro de los errores por datos mal utilizados.

Continuando por el alumno 5, podemos ver que en este caso no ha sido capaz de dibujar la gráfica. Vemos que el alumno ha procurado esbozar algunos triángulos para localizar la relación existente entre la altura del globo y la distancia al horizonte llegando a realizar el cálculo de alguna tangente, pero el alumno pronto ha desistido en su intento y lo ha dejado sin resolver. Éste alumno comete un error debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, así como también podríamos incluirlo dentro de los errores por datos mal utilizados, pero en este caso resulta más ambiguo puesto que no sabemos exactamente si la intención última del alumno era obtener una relación entre las variables o bien obtener la relación para posteriormente obtener la función y proceder a dibujar la gráfica.

Observando el ejercicio realizado por el alumno 6 podemos ver que ha realizado el dibujo de la gráfica correspondiente siguiendo las instrucciones dadas en el enunciado, aunque podríamos matizar que en el dibujo de la gráfica deberíamos ver claramente una tendencia final del propio trazado tendiendo a infinito en  $y$ , pero sin embargo al alumno

comienza a tenderle al final del dibujo a infinito en  $x$ , lo cual es algo extraño, por lo que matizamos esto en el dibujo. En cualquier caso si consideramos esto como error, podemos considerarlo como un error producido por una representación inadecuada o bien un error debido a la dificultad para obtener información espacial.

El alumno 6 de nuevo comete el mismo error que sus compañeros al no explicar cómo ha realizado la gráfica de la función, por lo que de nuevo vendrá incluido dentro de los errores por mala utilización de los datos.

El alumno 7 comete de nuevo errores ya cometidos por el resto de alumnos sin observar ninguno nuevo. Realiza correctamente el dibujo de la representación de la función, pero sin embargo lo realiza marcando los puntos y sin dar posteriormente ningún tipo de explicación, con lo cual de nuevo se cometen errores por datos mal utilizados.

El alumno 8 de nuevo repite también errores anteriormente valorados. De nuevo vemos que la colocación de las variables en los ejes es errónea, por lo que tenemos un error por deficiencia de hechos, destrezas y conceptos previos. En este caso, el alumno explica el cambio que se produce al variar cada una de estas dos variables, aunque resulta muy confusa su explicación. En cualquier caso, esto era algo que no le habíamos pedido, con lo cual incluimos otro error más por parte del alumno 8 dentro de los datos mal utilizados.

Continuando con el alumno 9, podemos ver que ha realizado el dibujo correctamente sin marcar los puntos, pero de nuevo se repite el error por datos mal utilizados al no explicar el modo en el que se ha dibujado la gráfica.

### Ejercicio 6

Comenzamos evaluando el ejercicio realizado por el alumno 2, puesto que el alumno 1 no ha contestado el ejercicio.

En este caso, el alumno procura realizar la representación gráfica en base a los puntos que le vienen dados en la tabla. El alumno llega a la conclusión de que esta es

una función de tipo exponencial, por lo que comete su primer error, lo cual le va a impedir ya obtener la función ajustada a esta tabla. El error cometido por el alumno lo podemos incluir dentro de los errores atribuidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento y dentro de éstos, lo incluimos a su vez en los errores de transferencia negativa a partir de ideas previas.

Pasando ahora a la siguiente tabla, vemos que el alumno ha optado por copiar la función que sabe que se ajusta a esta tabla, puesto que esta función al alumnado le resulta más conocida que la anterior, por lo que, el alumno en este caso comete un error por mala utilización de datos, ya que no sigue las directrices que indica el enunciado.

El alumno realiza sus explicaciones correctamente, pero la fórmula obtenida debería de haberla sacado de la representación gráfica y no de la explicación física. En este caso vemos muy bien que los alumnos no son capaces de relacionar las dos asignaturas, de tal forma que, a ellos les resulta más sencillo utilizar la fórmula conocida, sin plantearse de dónde viene.

Sin embargo, el alumno una vez que ha obtenido la fórmula, entonces sí reconoce que se ajusta a la tabla puesto que es una recta, lo cual es correcto, aunque no se ajusta a lo pedido inicialmente.

El alumno 3 no responde al primer apartado, por lo que no podemos detectar errores en el mismo, sin embargo sí que lo realiza respondiendo al segundo, y de nuevo comete el mismo error que el alumno 1, puesto que copia la fórmula habitual de física, ya que resulta obvio que el alumno no ha seguido las pautas del enunciado, con lo que de nuevo comete un error por datos mal utilizados.

El alumno 4 realiza una representación gráfica de la tabla del apartado primero. El problema que se observa es que, al no haber colocado los datos correctamente, la gráfica que dibuja parece ser una recta, lo cual es totalmente erróneo.

Todo esto resulta por no haber mantenido una diferencia constante en los valores representados en cada uno de los ejes, por lo que de nuevo nos encontramos ante un

error producido por una representación inadecuada, pudiendo incluirlo en este caso dentro de los errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento.

Al no haber realizado más ejercicios ni haber explicado nada, sólo podemos concluir que, aparte de cometer en el apartado primero un error por un mal uso de los datos al no proceder a una explicación sobre la realización de la gráfica, no podemos sacar más conclusiones sobre este alumno.

El alumno 6 es el siguiente que ha intentado realizar el ejercicio. Comienza nada más por escribir algunas fórmulas conocidas para progresiones aritméticas, y así termina él mismo. En este caso es difícil conocer un error, pero podemos determinar que el alumno ni siquiera ha sido capaz de reflexionar ni de entender qué le pedía el enunciado. Incluiremos este error cometido dentro de los errores debidos a asociaciones incorrectas, aunque también puede haber sido debido a una mala utilización de los datos. En este caso el error es ambiguo al no disponer de una sencilla explicación sobre el ejercicio por parte del alumno.

El alumno 7 de nuevo decide recurrir a copiar la fórmula conocida que relaciona los grados Celsius con los grados Fahrenheit, pero no sigue las instrucciones del enunciado, por lo que de nuevo comete un error por mala utilización de los datos. No podemos obtener más información acerca de los errores cometidos por este estudiante puesto que el otro apartado no lo sabía hacer.

El alumno 8 comete exactamente los mismos errores que el alumno 7, por lo que lo valoraremos igualmente.

## CONCLUSIONES

Habiendo realizado un análisis individualmente de cada alumno y de cada ejercicio en profundidad, nos atrevemos ahora a plasmar nuestras propias conclusiones sobre el estudio realizado. Para comenzar, concluimos que los alumnos presentan la principal dificultad a la hora leer los enunciados y procurar seguir las indicaciones de los mismos.

En muchos de los casos hemos podido ver que los alumnos cometen errores por la mala utilización de datos y esto es debido a la falta de comprensión sobre el enunciado o bien directamente a la pasividad por parte del alumno.

Hemos subrayado incluso las partes más interesantes de cada problema, o aquellas que suponíamos que el alumno iba a pasar por alto, pero aún así, no hemos podido evitar en muchos de los casos que los alumnos cometieran errores.

Lo siguiente que podemos observar es que, efectivamente al alumnado le cuesta salir de los ejercicios a los que están acostumbrados. Aun teniendo esto en cuenta, deberían reflexionar para la realización de los mismos y utilizar una estrategia de pensamiento lateral pero que vemos que en la mayoría de los casos, no lo aplican.

Éste es un problema que deberíamos plantearnos tanto los docentes en ejercicio como los futuros docentes. Es cierto que debido tal vez a una falta de madurez, los alumnos a estas edades no acostumbran a reflexionar, pero debemos tener en cuenta que las materias pertenecientes al ámbito científico necesitan de un nivel muy alto de reflexión y deberían ser conexionadas entre sí para facilitar al alumnado los conceptos y las competencias que han de adquirir.

También hemos podido comprobar que los alumnos han cometido errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conocimientos previos. En este caso, mayoritariamente hemos podido observar que los alumnos no disponen de los conceptos que debían haber sido adquiridos previamente. En algunos casos, hemos observado que faltaban conceptos de un nivel muy inferior al que se supone que deberían tener, lo cual es un hecho bastante grave y que se debería de solventar en clase a la mayor brevedad.

Así mismo, hemos podido comprobar que, a pesar de que a los alumnos se les indicó explícitamente que podrían utilizar el material que consideraran necesario, algunos de ellos han sido reacios y han decidido no buscar algunas fórmulas sencillas que habrían encontrado simplemente abriendo el libro de texto.

A su vez hemos observado que en muchos casos los alumnos cometen errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento, lo cual viene producido

por la habitual memorización por parte del alumno del método de resolución de los ejercicios típicos que se les proponen. En este punto es necesario reiterar una enfatización sobre el hecho de que en todas las disciplinas científicas es necesario reflexionar profundamente para llegar a solventar cualquier problema que se nos pueda plantear.

En ocasiones puntuales, hemos podido observar errores técnicos que, en algunos casos son fácilmente solucionables pero que, en casos más puntuales aún, reflejan una falta tremenda de conceptos básicos adquiridos y por los que los docentes deberíamos preocuparnos seriamente. Tal era el caso de un par de alumnos que han cometido errores en ecuaciones de primer grado, cuando esto se supone superado en primero de E.S.O. (12 años).

Queda añadir que nos hemos visto sorprendidos por unos resultados que no esperábamos en absoluto en el ejercicio 2. Recordemos que este ejercicio lo habíamos planteado para ayudar a los alumnos en el ejercicio 3 y en este caso no esperábamos observar errores, salvo alguno en algún caso técnico, puesto que la representación de una parábola viene incluida dentro del currículo de la E.S.O. y sin embargo observamos con sorpresa que se están cometiendo errores que, en algunos casos, son bastante graves y que, sobre todo, no tienen ningún tipo de sentido matemático.

En base a todos los errores cometidos así como a la observación de los ejercicios realizados, podemos concluir que los alumnos encuentran grandes dificultades a la hora de enfrentarse a problemas que no han visto antes, aún incluso suponiendo que disponen de los medios y de los conceptos adecuados para la realización de los mismos. Según esto, consideramos que los problemas que implican conexiones entre diferentes asignaturas o con la vida real deberían presentarse ante el alumnado en el ámbito académico puesto que la adquisición de conceptos en base a la memorización de los mismos a largo plazo no aporta nada. Se deberían proponer ejercicios en un contexto adecuado y hacer énfasis en realizar conexiones entre las asignaturas que tienen más relación puesto que esto, a largo plazo, resultaría más beneficioso para el alumnado.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Alayo, F., & Shell Centre for Mathematical Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao: Servicio Editorial, Universidad del País Vasco = Argitarapen Zerbitzua, Euskal Herriko Unibertsitatea.
2. Alzugaray, G., Frausin, A., Kanashiro, A. M., & Oviedo, L. M. (2004). Un problema motivador para un trabajo interdisciplinario en matemática y física.
3. Ausubel, D., Novak, J y Hanesian, H. (1991) *Psicología Educacional, un punto de vista cognitivo*. 5ta. Reimpresión, Trillas. México.
4. De Bono, E. (1993). El pensamiento lateral. *España: editorial Paidós.*[Links].
5. Froelich, G. W., & Vicente Carreto, J. M. (1993). *Conexiones matemáticas*. Sevilla: SAEM Thales
6. Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O., Inbar S. (1987). An Empirical classification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 18, págg. 3-14.
7. Ortega, T. (2005). *Conexiones matemáticas: Motivación del alumnado y competencia matemática* (1a ed.). Barcelona: Graó.
8. Orden EDU/363/2015 de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.
9. Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*,, 163-172.
10. Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.
11. Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.